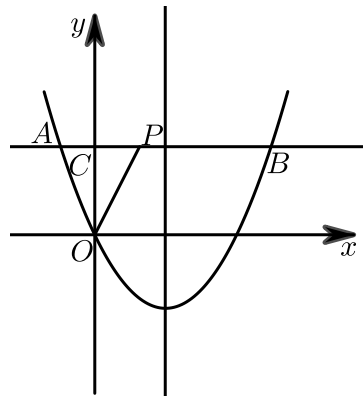


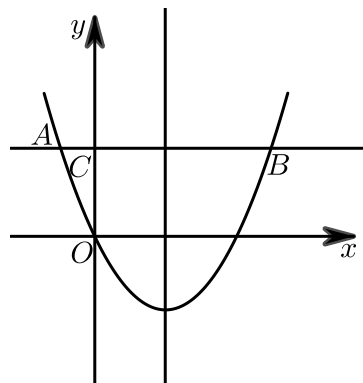
第2讲二次函数与线段和差最值（练习）

一、单线段的最值

1. 如图，过抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x$ 上一点 A 作 x 轴的平行线，交抛物线于另一点 B ，交 y 轴于点 C ，已知点 A 的横坐标为 -2 。



- (1) 求抛物线的对称轴和点 B 的坐标。
- (2) 在 AB 上任取一点 P ，连接 OP ，作点 C 关于直线 OP 的对称点 D 。
- ① 连接 BD ，则 BD 的最小值为 _____。
- ② 当点 D 落在抛物线的对称轴上，求 P 点坐标。



【答案】 (1) 对称轴 $x = 4$ ， $B(10, 5)$ 。

(2) ① $5\sqrt{5} - 5$

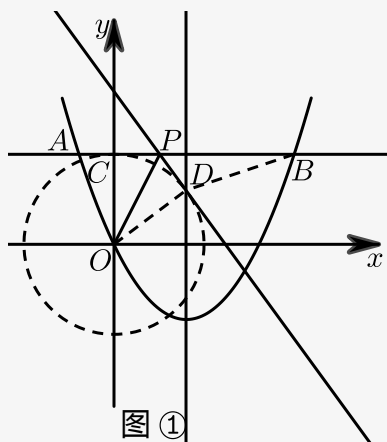
② $P\left(\frac{5}{2}, 5\right)$ 。

【解析】 (1) 由题意 $A(-2, 5)$ ，对称轴 $x = -\frac{-2}{2 \times \frac{1}{4}} = 4$ ，

$\therefore A, B$ 关于对称轴对称，

$\therefore B(10, 5)$ 。

(2) ① 如图①中 ,



由题意点D在以O为圆心OC为半径的圆上 ,

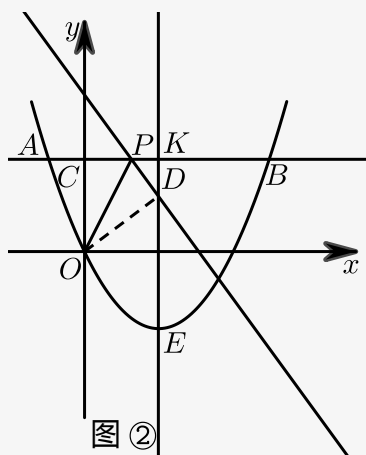
$\therefore$ 当O、D、B共线时 ,

BD 的最小值 $= OB - OD$

$$= \sqrt{5^2 + 10^2} - 5$$

$$= 5\sqrt{5} - 5 .$$

② 如图②中 ,



当点D在对称轴上时 , 在 $\text{Rt}\triangle ODE$ 中 ,

$$OD = OC = 5 , OE = 4 ,$$

$$\therefore DE = \sqrt{OD^2 - OE^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 ,$$

$\therefore$ 点D的坐标为 $(4, 3)$,

设 $PC = PD = x$, 在 $\text{Rt}\triangle PDK$ 中 ,

$$x^2 = (4 - x)^2 + 2^2 ,$$

$$\therefore x = \frac{5}{2} ,$$

$$\therefore P\left(\frac{5}{2}, 5\right) .$$

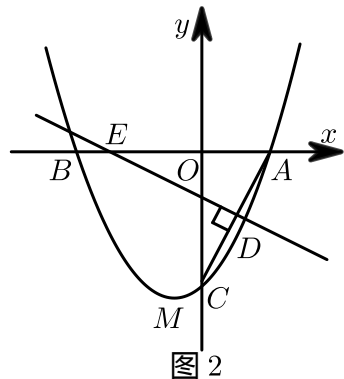
【标注】【知识点】二次函数与动点问题

二、将军饮马

2. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx - 4$ 经过点 $A(2, 0)$ 、 $B(-4, 0)$ ，与 y 轴交于点 C 。

(1) 求这条抛物线的解析式。

(2) 如图2，线段 AC 的垂直平分线交 x 轴于点 E ，垂足为 D ， M 为抛物线的顶点，在直线 DE 上是否存在一点 G ，使 $\triangle CMG$ 的周长最小？若存在，求出点 G 的坐标；若不存在，请说明理由。



【答案】(1) 抛物线的解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$ 。

(2) 存在， $G\left(\frac{3}{4}, -\frac{15}{8}\right)$ 。

【解析】(1) $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx - 4$ 经过点 $A(2, 0)$ 、 $B(-4, 0)$ ，

$$\therefore \begin{cases} 4a + 2b - 4 = 0 \\ 16a - 4b - 4 = 0 \end{cases}$$

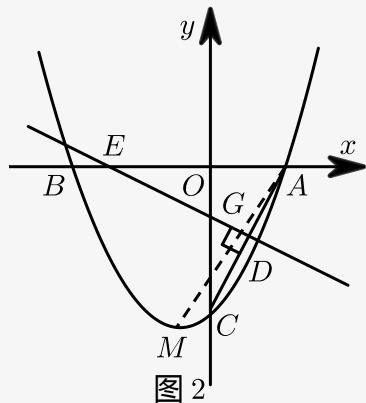
$$\text{解得} \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$ 。

$$(2) y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4 = \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{9}{2},$$

$$\therefore M\left(-1, -\frac{9}{2}\right).$$

如图2，连接 AM 交直线 DE 于点 G ，此时， $\triangle CMG$ 的周长最小。



设直线 AM 的解析式为 $y = kx + b'$ ，将 $A(2, 0)$ ， $M\left(-1, -\frac{9}{2}\right)$ 代入，

$$\text{得} \begin{cases} 2k + b' = 0 \\ -k + b' = -\frac{9}{2} \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = \frac{3}{2} \\ b' = -3 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线} AM \text{的解析式为} y = \frac{3}{2}x - 3.$$

$$\text{在Rt}\triangle AOC \text{中}, AC = \sqrt{OA^2 + OC^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}.$$

$\therefore D$ 为 AC 的中点,

$$\therefore AD = \frac{1}{2}AC = \sqrt{5},$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AOC, \angle EAD = \angle CAO,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle AOC,$$

$$\therefore \frac{AD}{AO} = \frac{AE}{AC},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{AE}{2\sqrt{5}},$$

$$\therefore AE = 5,$$

$$\therefore OE = AE - AO = 5 - 2 = 3,$$

$$\therefore E(-3, 0),$$

$$\therefore A(2, 0), C(0, -4), D \text{为} AC \text{的中点},$$

$$\therefore D(1, -2),$$

设直线 DE 的函数解析式为 $y = mx + n$,

$$\therefore \begin{cases} m + n = -2 \\ -3m + n = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得:} \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ n = -\frac{3}{2} \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线} DE \text{的解析式为} y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

$$\text{联立} \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \\ y = \frac{3}{2}x - 3 \end{cases},$$

$$\text{解得:} \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = -\frac{15}{8} \end{cases},$$

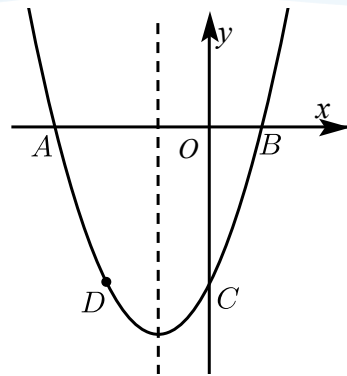
$$\therefore G\left(\frac{3}{4}, -\frac{15}{8}\right).$$

故直线 DE 上存在一点 G , 使 $\triangle CMG$ 的周长最小,

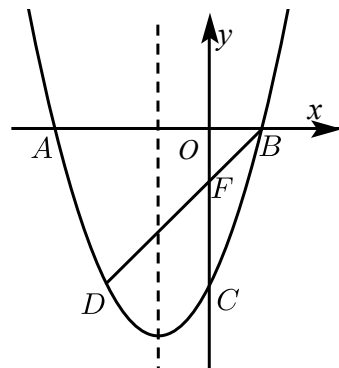
$$\text{此时} G \text{的坐标为} \left(\frac{3}{4}, -\frac{15}{8}\right).$$

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

3. 如图, 二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交于 A, B 两点, 其中 A 点坐标为 $(-3, 0)$, 与 y 轴交于点 C , 点 $D(-2, -3)$ 在抛物线上.



- (1) 求抛物线的解析式 .
- (2) 求 $\triangle ABC$ 的面积 .
- (3) 抛物线的对称轴上有一动点 P , 求出 $PA + PD$ 的最小值 .
- (4) 如图 , 若直线 DB 与 y 轴交于点 F , 点 M 是对称轴 $x = -1$ 上一个动点 , 点 N 是 x 轴上一个动点 , 则四边形 $CFNM$ 的周长是否有最小值 ? 若有 , 试求出这个最小值 ; 若没有 , 请说明理由 .



【答案】 (1) $y = x^2 + 2x - 3$.

(2) 6 .

(3) $3\sqrt{2}$.

(4) 有最小值 . 最小值是 $2\sqrt{5} + 2$.

【解析】 (1) 由题意 , 得 $\begin{cases} 9 - 3b + c = 0 \\ 4 - 2b + c = -3 \end{cases}$,

$$\text{解得} \begin{cases} b = 2 \\ c = -3 \end{cases} .$$

故抛物线的解析式为 $y = x^2 + 2x - 3$.

故答案为 : $y = x^2 + 2x - 3$.

(2) 令 $x^2 + 2x - 3 = 0$, 则 $x_1 = -3$, $x_2 = 1$. 故点 B 的坐标为 $(1, 0)$, 点 C 的坐标为 $(0, -3)$

.

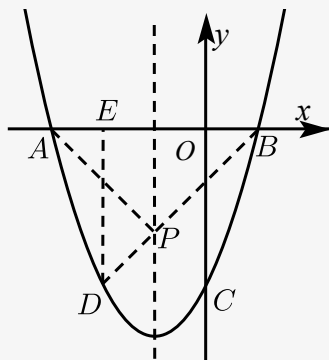
则 $AB = 4$, $OC = 3$,

所以 $\triangle ABC$ 的面积 = $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$.

故答案为 : 6 .

(3)

点A与点B关于 $x = -1$ 对称，如图，连接BD交直线 $x = -1$ 于点P，则点P即为所求。



作 $DE \perp AB$ 于E，则 $BE = 3$ ， $DE = 3$ ，由勾股定理，得 $BD = 3\sqrt{2}$ 。

故 $PA + PD$ 的最小值为 $3\sqrt{2}$ 。

故答案为： $3\sqrt{2}$ 。

(4) 有最小值。

因为D点的坐标是 $(-2, -3)$ ，B点的坐标是 $(1, 0)$ ，所以直线BD的解析式为 $y = x - 1$ 。

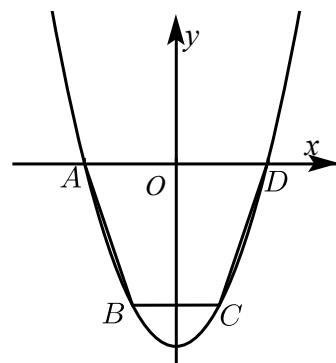
所以点F的坐标是 $(0, -1)$ 。点F关于x轴对称的点F'的坐标是 $(0, 1)$ ，点C关于对称轴直线 $y = x - 1$ 对称的点是点D。

线段 $DF' + CF$ 的长就是四边形CFNM的周长的最小值，线段 DF' 与 $x = -1$ 的交点为此时的M点，线段 DF' 与x轴的交点为此时的N点。 $DF' = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ ，所以四边形CFNM的周长的最小值是 $2\sqrt{5} + 2$ 。

故答案为：有最小值。最小值是 $2\sqrt{5} + 2$ 。

【标注】【知识点】二次函数与轴对称问题

4. 如图，抛物线 $y = ax^2 + c$ ($a > 0$) 经过梯形ABCD的四个顶点，梯形的底AD在x轴上，其中 $A(-2, 0)$ ， $B(-1, -3)$ 。



(1) 求抛物线的解析式。

(2) 点M为y轴上任意一点，当点M到A、B两点的距离之和为最小时，求此时点M的坐标。

(3) 点 N 为 y 轴上任意一点, 当点 N 到 A 、 B 两点的距离之差为最大时, 求此时点 N 的坐标.

【答案】(1) $y = x^2 - 4$.

(2) $M(0, -2)$.

(3) $N(0, -6)$.

【解析】(1) 因为点 A 、 B 均在抛物线上,

故点 A 、 B 的坐标适合抛物线方程

$$\therefore \begin{cases} 4a + c = 0 \\ a + c = -3 \end{cases}$$

$$\text{解之得: } \begin{cases} a = 1 \\ c = -4 \end{cases};$$

故 $y = x^2 - 4$ 为所求.

(2) 连接 BD , 交 y 轴于点 M ,

则点 M 就是所求作的点. 设 BD 的解析式为 $y = kx + b$,

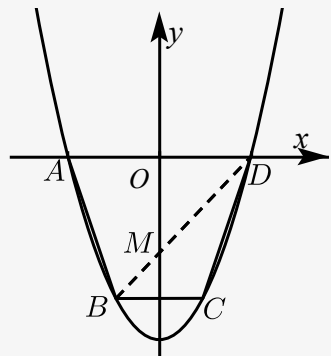
$$\text{则有 } \begin{cases} 2k + b = 0 \\ -k + b = -3 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k = 1 \\ b = -2 \end{cases},$$

故 BD 的解析式为 $y = x - 2$;

令 $x = 0$ 则 $y = -2$,

故 $M(0, -2)$.



(3) 连接 AB , 交 y 轴于点 N , 则点 N 就是所求作的点.

设 AB 的解析式为,

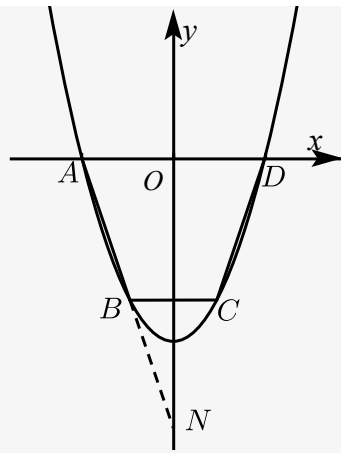
$$\text{则有 } \begin{cases} -2k + b = 0 \\ -k + b = -3 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k = -3 \\ b = -6 \end{cases},$$

故 AB 的解析式为 $y = -3x - 6$;

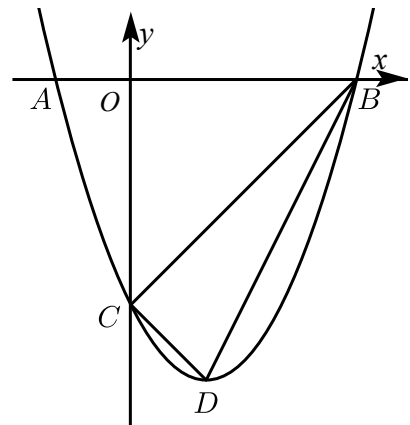
令 $x = 0$, 则 $y = -6$,

故 $N(0, -6)$.



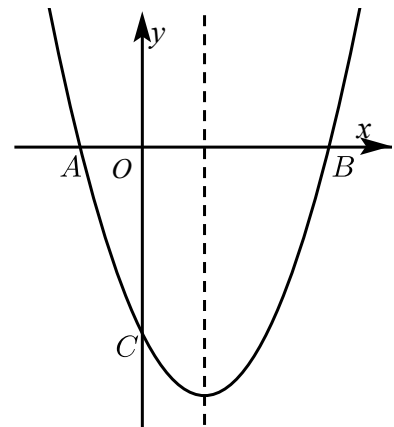
【标注】【知识点】二次函数一般式

5. 如图，抛物线解析式为 $y = x^2 - 2x - 3$.



(1) 点 D 为抛物线的顶点，在抛物线上找点 Q 使得 $S_{\triangle DBC} = S_{\triangle QBC}$ ，求出所有的点 Q .

(2) 在抛物线的对称轴上找一点 P ，使得 $|PB - PC|$ 最大，求 P 点坐标 .



【答案】(1) $Q_1(1, -4)$, $Q_2(2, -3)$, $Q_3(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}, \frac{1 - \sqrt{17}}{2})$, $Q_4(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}, \frac{1 + \sqrt{17}}{2})$.

(2) $P(1, -6)$.

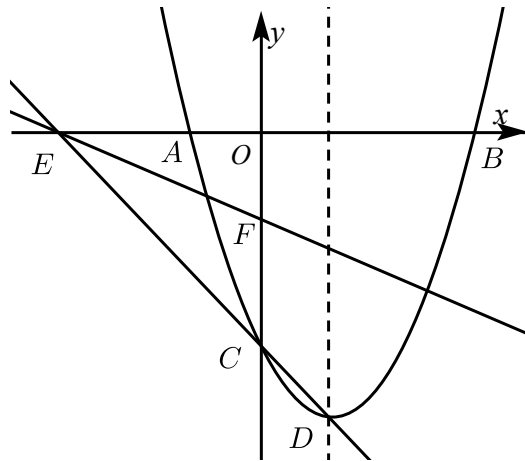
【解析】(1)

$$\text{双轨平行线}, Q_1(1, -4), Q_2(2, -3), Q_3\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right), \\ Q_4\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right).$$

(2) 略.

【标注】【知识点】二次函数与轴对称问题

6. 如图, 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点, 与 y 轴交于 C 点, 且 $OC = OB = 3OA = 3$, 点 D 为抛物线顶点, 作直线 CD 与 x 交于点 E , 过 E 作 $\angle BED$ 的角平分线与 y 轴交于点 F .



- (1) 求抛物线的表达式和点 F 的坐标.
 (2) 点 M 是射线 EF 上的动点, 点 N 是线段 BE 上的动点, M 、 N 在何位置时, $BM + MN$ 的值最小.
 请求出 $BM + MN$ 的最小值和 M 、 N 的坐标.

【答案】 (1) 抛物线的表达式: $y = x^2 - 2x - 3$, 点 F 的坐标 $(0, 3 - 3\sqrt{2})$.

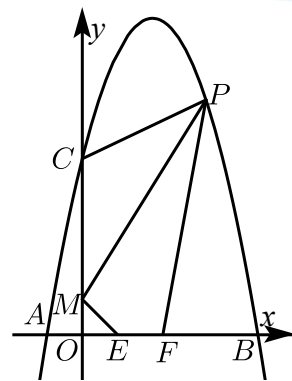
(2) 最小值 $3\sqrt{2}$, $M(3\sqrt{2} - 3, 3\sqrt{2} - 6)$, $N(3\sqrt{2} - 3, 0)$.

【解析】 (1) 略

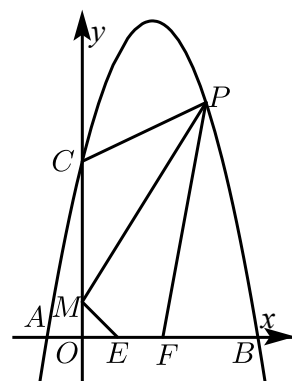
(2) 略

【标注】【知识点】二次函数与轴对称问题

7. 如图, 对称轴为直线 $x = 2$ 的抛物线经过点 $A(-1, 0)$, $C(0, 5)$ 两点, 与 x 轴另一交点为 B , 已知 $M(0, 1)$, $E(a, 0)$, $F(a + 1, 0)$, 点 P 是第一象限内的抛物线上的动点.



- (1) 求此抛物线的解析式 .
- (2) 当 $a = 1$ 时 , 求四边形 $MEFP$ 面积的最大值 , 并求此时点 P 的坐标 .
- (3) 若 $\triangle PCM$ 是以点 P 为顶点的等腰三角形 , 求 a 为何值时 , 四边形 $PMEF$ 周长最小 ? 请说明理由 .



【答案】(1) $y = -x^2 + 4x + 5$.

(2) $\left(\frac{9}{4}, \frac{143}{16}\right)$.

(3) $a = \frac{\sqrt{6}+1}{4}$.

【解析】(1) 设抛物线为 $y = a(x-2)^2 + k$,

$\because$ 二次函数的图象过点 $A(-1, 0)$ 、 $C(0, 5)$,

$$\therefore \begin{cases} 9a + k = 0 \\ 4a + k = 5 \end{cases} ,$$

$$\text{解得 : } \begin{cases} a = -1 \\ k = 9 \end{cases} ,$$

$\therefore$ 二次函数的函数关系式为 $y = -(x-2)^2 + 9$,

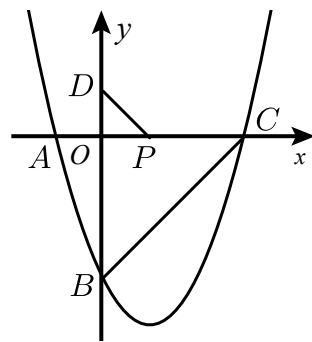
即 $y = -x^2 + 4x + 5$.

(2) 当 $a = 1$ 时 , $E(1, 0)$, $F(2, 0)$,

作点 A 关于 y 轴的对称点 A' ,
 过点 D' 作 $D'E \perp CA'$ 交于点 E ,
 则 $D'E$ 为所求 ;
 由对称性可知 , $\angle ACO = \angle OCA'$,
 $\therefore \sin \angle OCA' = \frac{3}{5}$,
 $\therefore \frac{3}{5}PC = PE$,
 再由 $D'P = DP$,
 $\therefore \frac{3}{5}PC + PD$ 的最小值为 $D'E$,
 $\therefore A'(3, 0)$, $D'(-1, 0)$,
 $\therefore A'D' = 4$, $CO = 4$, $A'O = 3$,
 $\therefore CA' = 5$,
 $\therefore \frac{4}{5} = \frac{D'E}{4}$,
 $\therefore D'E = \frac{16}{5}$.
 故答案为 $\frac{16}{5}$.

【标注】【知识点】胡不归问题

10. 如图 , 二次函数 $y = ax^2 - 2x + c$ 的图象与 x 轴交于点 A 、点 $C(3, 0)$, 与 y 轴交于点 $B(0, -3)$. P 是 x 轴上的一个动点 , 点 $D(0, 1)$ 在 y 轴上 , 连接 PD , 则 $\sqrt{2}PD + PC$ 的最小值为 _____ .



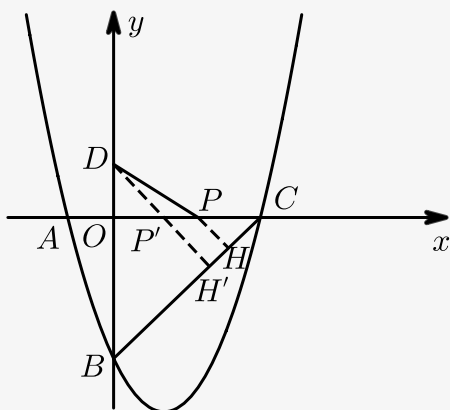
【答案】 4

【解析】把 $C(3, 0)$, $B(0, -3)$ 代入 $y = ax^2 - 2x + c$,

得到 $\begin{cases} c = -3 \\ 9a - 6 + c = 0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a = 1 \\ c = -3 \end{cases}$,

$\therefore y = x^2 - 2x - 3$,

如图 , 过点 P 作 $PH \perp BC$ 于 H , 过点 D 作 $DH' \perp BC$ 于点 H' , 交 x 轴于点 P' ,



$\because B(0, -3), C(3, 0), \therefore OB = OC = 3,$

又 $\because \angle BOC = 90^\circ,$

$\therefore \angle PCH = \angle OBC = 45^\circ,$

在 $\text{Rt}\triangle PCH$ 中, $PH = \frac{\sqrt{2}}{2}PC,$

$\therefore \sqrt{2}DP + PC = \sqrt{2}\left(PD + \frac{\sqrt{2}}{2}PC\right) = \sqrt{2}(PD + PH),$

根据垂线段最短可知, 当 $D、P、H$ 三点共线时, $\sqrt{2}DP + PC$ 的值最小, 最小值为 $\sqrt{2}DH'$,

在 $\text{Rt}\triangle DH'B$ 中,

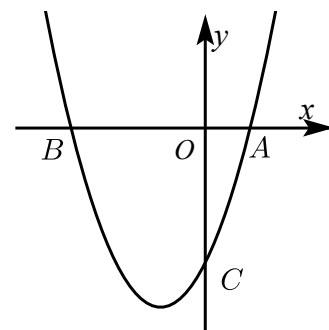
$\because BD = 4, \angle DBH' = 45^\circ,$

$\therefore DH' = \frac{\sqrt{2}}{2}BD = 2\sqrt{2},$

$\therefore \sqrt{2}DP + PC$ 的最小值为 $\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4.$

【标注】【知识点】二次函数与线段和差问题

11. 如图, 抛物线 $y = x^2 - 2mx + 3m$ 与 x 轴交于 $A、B$ 两点, 与 y 轴交于点 $C(0, -3).$



(1) 求该抛物线的解析式.

(2) 若点 E 为线段 OC 上一动点, 试求 $2AE + \sqrt{2}EC$ 的最小值.

【答案】 (1) $y = x^2 + 2x - 3.$

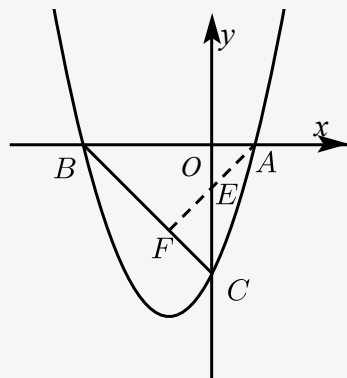
(2) $4\sqrt{2}.$

【解析】(1) 把点C的坐标代入抛物线表达式得： $9 + 6m + 3m = -3$ ，

解得： $m = -1$ ，

故该抛物线的解析式为： $y = x^2 + 2x - 3$ 。

(2) 过点E作 $EF \perp BC$ ，交BC于点F，



则 $EF = \frac{\sqrt{2}}{2}EC$ ， $AE + \frac{\sqrt{2}}{2}EC = AE + EF$ ，

$\therefore$ 当A、E、F三点共线时， $AE + \frac{\sqrt{2}}{2}EC$ 最小，即 $2AE + \sqrt{2}EC$ 最小，

设：直线AF的表达式为： $y = x + b$ ，

将点A坐标(1,0)代入上式， $1 + b = 0$ ，则 $b = -1$ ，

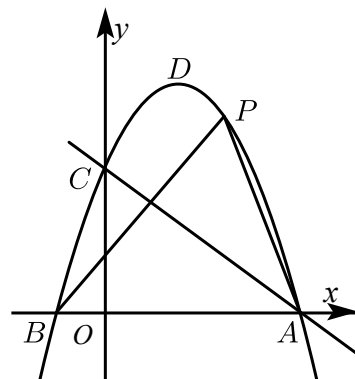
则直线AE的表达式为： $y = x - 1$ ，则点E的坐标为(0, -1)，

则 $EC = 3 - 1 = 2$ ， $AE = \sqrt{2}$ 。

$2AE + \sqrt{2}EC = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ 。

【标注】【知识点】二次函数与轴对称问题

12. 如图，抛物线 $y = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{9}{4}x + 6$ 交x轴于A、B两点，点A在点B的右侧，交y轴于点C，点D为顶点。



(1) 求点A、D的坐标。

(2) 若点P是抛物线上位于第一象限内对称轴右侧的一个动点，当 $S_{\triangle ABP} = 45$ 时，在线段AC上有一动点Q，当 $PQ + \frac{3}{5}QA$ 的值最小时，求Q的坐标和 $PQ + \frac{3}{5}QA$ 的最小值。

【答案】(1) A(8,0)、D(3, $\frac{75}{8}$)。

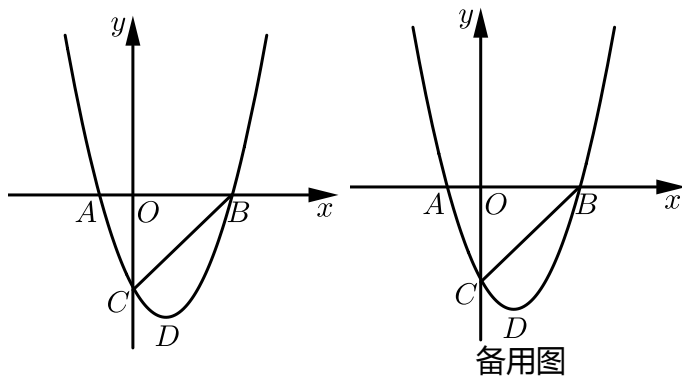
(2) 当 $Q(4,3)$ 时, $PQ + \frac{3}{5}QA$ 的最小值为 9.

【解析】(1) 略.

(2) 略.

【标注】【知识点】二次函数与轴对称问题

13. 如图, 已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴相交于 $A(-1, 0)$, $B(m, 0)$ 两点, 与 y 轴相交于点 $C(0, -3)$, 抛物线的顶点为 D .



(1) 求抛物线的解析式.

(2) 若 P 是直线 BC 下方抛物线上任意一点, 过点 P 作 $PH \perp x$ 轴于点 H , 与 BC 交于点 M .

① 求线段 PM 长度的最大值.

② 在①的条件下 (即 PM 最长时), 若 F 为 y 轴上一动点, 求 $PH + HF + \frac{\sqrt{2}}{2}CF$ 的最小值.

【答案】(1) $y = x^2 - 2x - 3$.

(2) ① $\frac{9}{4}$.

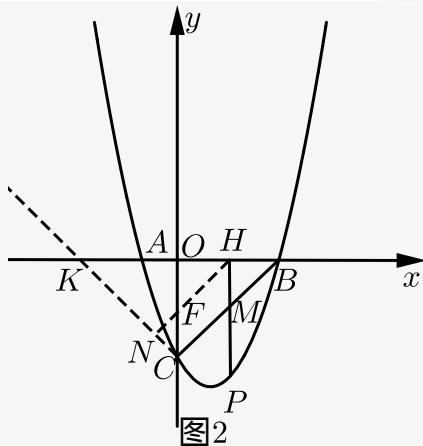
② $\frac{15 + 9\sqrt{2}}{4}$.

【解析】(1) 将 $A(-1, 0)$, $C(0, -3)$ 代入 $y = x^2 + bx + c$ 中, 得 $\begin{cases} 1 - b + c = 0 \\ c = -3 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} b = -2 \\ c = -3 \end{cases}$,

故抛物线的解析式为 $y = x^2 - 2x - 3$.

(2) ① 如图2,



$$\therefore B(3, 0), C(0, -3),$$

设直线 BC 的解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$,

$$\text{则} \begin{cases} 3k + b = 0 \\ b = -3 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = 1 \\ b = -3 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y = x - 3$,

设 $P(x, x^2 - 2x - 3)$, 则 $M(x, x - 3)$,

$\therefore PM$

$$= (x - 3) - (x^2 - 2x - 3)$$

$$= -x^2 + 3x$$

$$= -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4},$$

当 $x = \frac{3}{2}$ 时, PM 有最大值 $\frac{9}{4}$, 此时 $P\left(\frac{3}{2}, -\frac{15}{4}\right)$.

② 当 PM 有最大值, $P\left(\frac{3}{2}, -\frac{15}{4}\right)$,

在 x 轴的负半轴上取一点 K , 使 $\angle OCK = 45^\circ$, 过 F 作 $FN \perp CK$ 于 N ,

$$\therefore FN = \frac{\sqrt{2}}{2}CF,$$

当 N 、 F 、 H 三点共线时, $PH + NH$ 最小, 即 $PH + HF + \frac{\sqrt{2}}{2}CF$ 的值最小,

在 $\text{Rt}\triangle OCK$ 中, $OC = 3$,

$$\therefore OK = 3,$$

$$\therefore OH = \frac{3}{2},$$

$$\therefore KH = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2},$$

在 $\text{Rt}\triangle KNH$ 中, $\angle KHN = 45^\circ$,

$$\therefore KN = \frac{\sqrt{2}}{2}KH = \frac{9\sqrt{2}}{4},$$

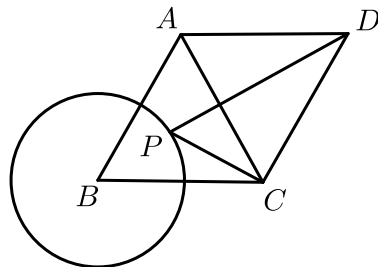
$$\therefore NH = KN = \frac{9\sqrt{2}}{4},$$

$$\therefore PH + HF + \frac{\sqrt{2}}{2}CF \text{ 的最小值是 } PH + NH = \frac{9\sqrt{2} + 15}{4}.$$

【标注】【知识点】二次函数与几何最值问题

四、阿氏圆

14. 如图，已知菱形 $ABCD$ 的边长为4， $\angle B = 60^\circ$ ， $\odot B$ 的半径为2， P 为 $\odot B$ 上一动点，则 $PD + \frac{1}{2}PC$ 的最小值为_____。

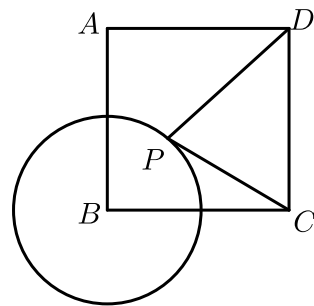


【答案】 $\sqrt{37}$

【解析】点 P 的轨迹是以 B 为圆心的圆，图中 $BP = \frac{1}{2}BC$ ，比例系数与所求比例系数一致，以 BC 为基准构造阿波罗尼斯圆， $\odot B$ 与直线 BC 交于 P_1P_2 ，由阿波罗尼斯圆定理可知直径 P_1P_2 上存在定比点 M 使得 $\frac{PC}{PM} = \frac{P_1C}{P_1M} = \frac{P_2C}{P_2M} = \lambda = 2$ ， $BP^2 = BM \cdot BC$ ，计算可得 $BM = 1$ ，勾股可得 $PD + \frac{1}{2}PC = PD + PM \geq \sqrt{37}$ 。

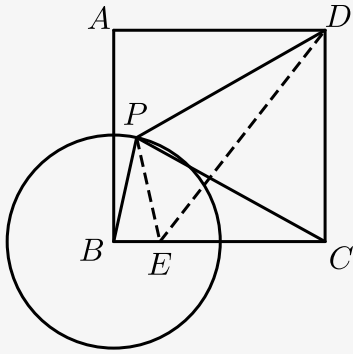
【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

15. 如图，四边形 $ABCD$ 为边长为4的正方形， $\odot B$ 的半径为2， P 是 $\odot B$ 上一动点，则 $PD + \frac{1}{2}PC$ 的最小值为_____； $\sqrt{2}PD + 4PC$ 的最小值为_____。



【答案】5； $10\sqrt{2}$

【解析】取 $BE = \frac{1}{2}BP = 1$ ，连接 PE ，



$$\therefore \frac{BE}{BP} = \frac{BP}{BC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \triangle BEP \sim \triangle BPC,$$

$$\therefore \frac{PE}{PC} = \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } PE + \frac{1}{2}PC,$$

$$\therefore PD + \frac{1}{2}PC = PD + PE,$$

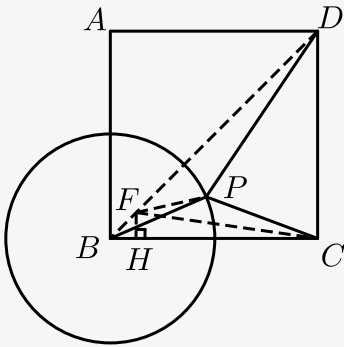
当且仅当P、D、E共线时取得最小值DE，

由已知有CE = 3，CD = 4，

$$\therefore DE = 5,$$

故PD + $\frac{1}{2}$ PC最小值为5，

连接BD，



$$\therefore BC = CD = 4,$$

$$\therefore BD = 4\sqrt{2},$$

$$\text{在 } BD \text{ 上取 } BF = \frac{1}{8}BD = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \frac{BF}{BP} = \frac{BP}{BD} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\therefore \triangle BFP \sim \triangle BPD,$$

$$\therefore \frac{PF}{PD} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\text{即 } PF = \frac{\sqrt{2}}{4}PD,$$

$$\therefore \sqrt{2}PD + 4PC = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{4}PD + PC\right) = 4(PF + PC),$$

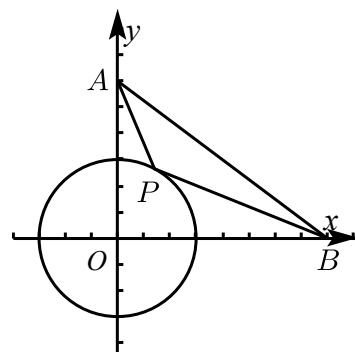
当且仅当F、P、C三点共线时有最小值4CF，

作FH⊥BC于H，

$$\begin{aligned}
&\therefore BF = \frac{\sqrt{2}}{2}, \angle FBH = 45^\circ, \\
&\therefore BH = FH = \frac{1}{2}, \\
&\therefore CH = BC - BH = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}, \\
&\therefore CF = \sqrt{CH^2 + FH^2} = \frac{5}{2}\sqrt{2}, \\
&\therefore \sqrt{2}PD + 4PC \text{ 最小值 } 4CF = 10\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】阿氏圆问题

16. 如图，点 $A(0,6)$ ， $B(8,0)$ ，半径为3的 $\odot O$ 上有一动点 P 。



- (1) 请你求出 $\frac{1}{2}PA + PB$ 的最小值。
- (2) 请你求出 $2PA + 4PB$ 的最小值。
- (3) 请你求出 $2PA + \frac{3}{4}PB$ 的最小值。

【答案】(1) $\frac{\sqrt{265}}{2}$ 。

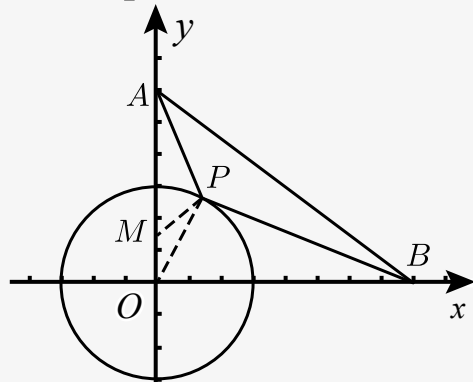
(2) $2\sqrt{265}$ 。

(3) $\frac{3}{4}\sqrt{265}$ 。

【解析】(1) 由已知有 $OA = 6$ ， $OB = 8$ ，

连接 OP ，则 $OP = 3$ ，

取 $OM = \frac{3}{2}$ ，



$$\therefore \frac{OM}{OP} = \frac{OP}{OA} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \triangle OMP \sim \triangle OPA,$$

$$\therefore \frac{MP}{PA} = \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } MP = \frac{1}{2}PA,$$

$$\therefore \frac{1}{2}PA + PB = MP + PB,$$

当且仅当 M 、 P 、 B 三点共线时取得最小值 BM ,

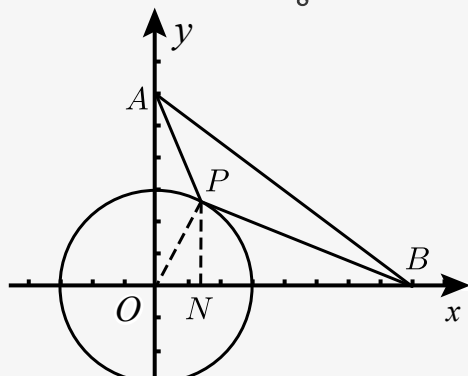
$$\therefore BM = \sqrt{OM^2 + OB^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 8^2} = \frac{\sqrt{265}}{2},$$

$$\text{故 } \frac{1}{2}PA + PB \text{ 最小值为 } \frac{\sqrt{265}}{2}.$$

$$(2) \therefore 2PA + 4PB = 4\left(\frac{1}{2}PA + PB\right),$$

$$\therefore 2PA + 4PB \text{ 最小值为 } 4BM = 2\sqrt{265}.$$

$$(3) \text{ 如图, 在 } OB \text{ 上取 } ON = \frac{9}{8},$$



$$\therefore \frac{ON}{OP} = \frac{OP}{OB} = \frac{3}{8},$$

$$\therefore \triangle ONP \sim \triangle OPB,$$

$$\therefore \frac{NP}{PB} = \frac{3}{8},$$

$$\text{即 } NP = \frac{3}{8}PB,$$

$$\therefore 2PA + \frac{3}{4}PB = 2\left(PA + \frac{3}{8}PB\right) = 2(PA + NP),$$

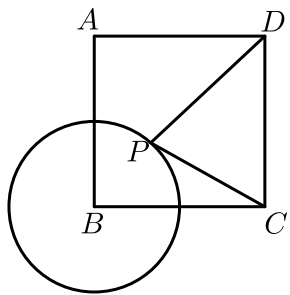
当且仅当 A 、 P 、 N 三点共线时 $AP + PN$ 取到最小值 AN ,

$$\therefore AN = \sqrt{OA^2 + ON^2} = \sqrt{6^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2} = \frac{3}{8}\sqrt{265},$$

$$\therefore 2PA + \frac{3}{4}PB \text{ 的最小值为 } 2AN = \frac{3}{4}\sqrt{265}.$$

【标注】【知识点】阿氏圆问题

17. 如图, 四边形 $ABCD$ 为边长为 4 的正方形, $\odot B$ 的半径为 2, P 是 $\odot B$ 上一动点, 则:



- (1) $PD + \frac{1}{2}PC$ 的最小值为 _____ ; $2PD - PC$ 的最大值为 _____ .
 (2) $\sqrt{2}PD + 4PC$ 的最小值为 _____ ; $4PC - \sqrt{2}PD$ 的最大值为 _____ .

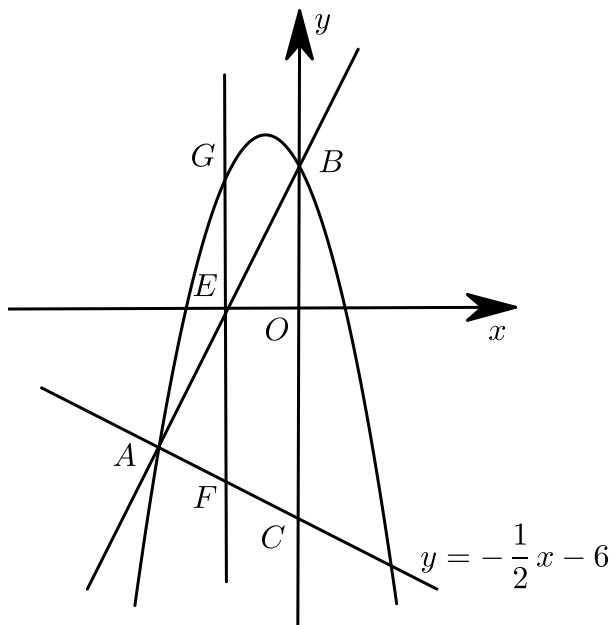
【答案】(1) 5 ; 10

(2) $10\sqrt{2}$; $10\sqrt{2}$

【标注】【知识点】正多边形与圆

【能力】运算能力

18. 如图, 抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与直线 AB 交于 $A(-4, -4)$, $B(0, 4)$ 两点, 直线 $AC: y = -\frac{1}{2}x - 6$ 交 y 轴于点 C . 点 E 是直线 AB 上的动点, 过点 E 作 $EF \perp x$ 轴交 AC 于点 F , 交抛物线于点 G .



- (1) 求抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 的表达式 .
 (2) 连接 GB , EO , 当四边形 $GEOB$ 是平行四边形时, 求点 G 的坐标 .
 (3) 解答下列各题 :
 ① 在 y 轴上存在一点 H , 连接 EH , HF , 当点 E 运动到什么位置时, 以 A, E, F, H 为顶点的四边形是矩形? 求出此时点 E, H 的坐标 .
 ②

在①的前提下，以点 E 为圆心， EH 长为半径作圆，点 M 为 $\odot E$ 上一动点，求 $\frac{1}{2}AM + CM$ 的最小值．

【答案】(1) $y = -x^2 - 2x + 4$.

(2) $G(-2, 4)$.

(3) ① $E(-2, 0)$, $H(0, -1)$.

$$\textcircled{2} \quad \frac{1}{2}AM + CM = \frac{5\sqrt{5}}{2} .$$

【解析】(1) $\because$ 点 $A(-4, -4)$, $B(0, 4)$ 在抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 上 ,

$$\therefore \begin{cases} -16 - 4b + c = -4 \\ c = 4 \end{cases} ,$$

$$\therefore \begin{cases} b = -2 \\ c = 4 \end{cases} ,$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -x^2 - 2x + 4$.

(2) 设直线 AB 的解析式为 $y = kx + n$ 过点 A , B ,

$$\therefore \begin{cases} n = 4 \\ -4k + n = -4 \end{cases} ,$$

$$\therefore \begin{cases} k = 2 \\ n = 4 \end{cases} ,$$

$\therefore$ 直线 AB 的解析式为 $y = 2x + 4$.

设 $E(m, 2m + 4)$,

$\therefore G(m, -m^2 - 2m + 4)$.

$\because$ 四边形 $GEOB$ 是平行四边形 ,

$\therefore EG = OB = 4$,

$\therefore -m^2 - 2m + 4 - 2m - 4 = 4$,

$\therefore m = -2$,

$\therefore G(-2, 4)$.

(3) ① 如图1 ,

由(2)知 , 直线 AB 的解析式为 $y = 2x + 4$,

$\therefore$ 设 $E(a, 2a + 4)$.

$\because$ 直线 $AC : y = -\frac{1}{2}x - 6$,

$\therefore F\left(a, -\frac{1}{2}a - 6\right)$.

设 $H(0, p)$,

$\because$ 以点 A , E , F , H 为顶点的四边形是矩形 ,

且直线 AB 的解析式为 $y = 2x + 4$, 直线 AC 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x - 6$,

$\therefore AB \perp AC$,

$\therefore EF$ 与 AH 互相平分 ,

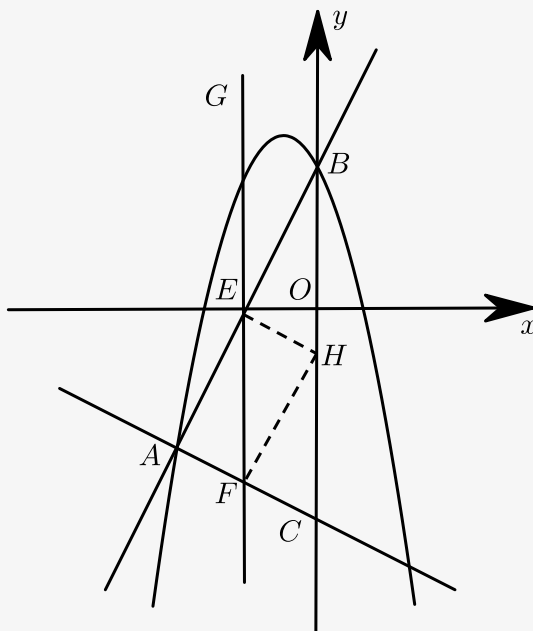


图 1

$$\frac{1}{2} \times (-4 + 0) = \frac{1}{2}(a + a), \quad \frac{1}{2}(-4 + p) = \frac{1}{2}\left(2a + 4 - \frac{1}{2}a - 6\right),$$

$$\therefore a = -2, \quad p = -1,$$

$$\therefore E(-2, 0), \quad H(0, -1).$$

② 如图2,

由①知, $E(-2, 0)$,

$H(0, -1)$, $A(-4, -4)$,

$$\therefore EH = \sqrt{5},$$

$$AE = 2\sqrt{5}.$$

设 AE 交 $\odot E$ 于 G , 取

EG 的中点 P ,

$$\therefore PE = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

连接 PC 交 $\odot E$ 于 M ,

连接 EM ,

$$\therefore EM = EH = \sqrt{5},$$

$$\therefore \frac{PE}{ME} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \frac{ME}{AE} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{PE}{ME} = \frac{ME}{AE} = \frac{1}{2}, \quad \therefore \angle PEM = \angle MEA,$$

$$\therefore \triangle PEM \sim \triangle MEA,$$

$$\therefore \frac{PM}{AM} = \frac{ME}{AE} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore PM = \frac{1}{2}AM,$$

$$\therefore \frac{1}{2}AM + CM \text{ 的最小值} = PC.$$

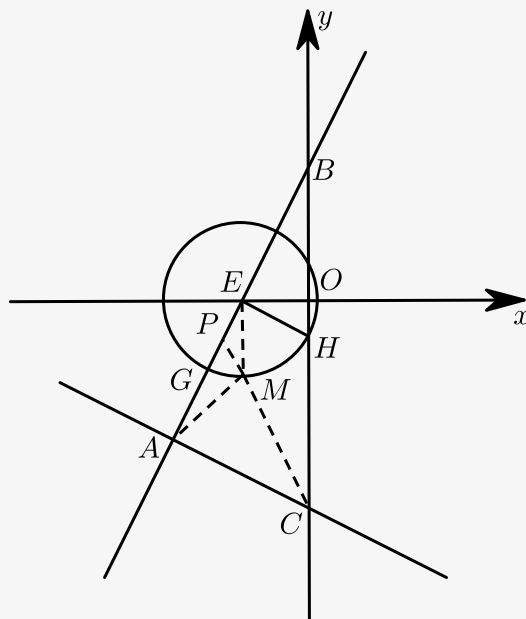


图 2

设点 $P(p, 2p+4)$,

$\therefore E(-2, 0)$,

$$\therefore PE^2 = (p+2)^2 + (2p+4)^2 = 5(p+2)^2.$$

$$\therefore PE = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore 5(p+2)^2 = \frac{5}{4},$$

$$\therefore p = -\frac{5}{4} \text{ 或 } p = -\frac{3}{2} \text{ (由于 } E(-2, 0) \text{ , 所以舍去) ,}$$

$$\therefore P\left(-\frac{5}{2}, -1\right).$$

$\therefore C(0, -6)$,

$$\therefore PC = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + (-1+6)^2} = \frac{5\sqrt{5}}{2},$$

$$\text{即: } \frac{1}{2}AM + CM = \frac{5\sqrt{5}}{2}.$$

【标注】【知识点】二次函数与圆的综合问题